On désigne par r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r' la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

1. Construire le point A' image de A par r'.
2. Identifier $r' \circ r$.
3. Montrer que les droites $(\Omega A')$ et (AB) sont parallèles.

24 Soit ABC un triangle direct et A' le milieu du segment $[BC]$.

Soit P et Q les deux points définis par $\begin{cases} PA = PC \\ (\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \end{cases}$ et $\begin{cases} QB = QA \\ (\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QA}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \end{cases}$.

On désigne par Ω le milieu du segment $[PQ]$, I le milieu du segment $[QA']$, J le milieu du segment $[PA']$ et P' le symétrique de P par rapport à A'.

On désigne par R_P et R_Q et les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs P et Q.

On pose $f = R_Q \circ S_{A'} \circ R_P$.

1. a. Déterminer $f(A)$. Caractériser alors f.

b. Montrer que $R_Q(P') = P$.

2. a. Montrer qu'il existe un unique déplacement φ tel que $\varphi(A') = Q$ et $\varphi(P) = A'$.

b. Caractériser φ.

c. Donner la nature et les éléments caractéristiques de $h = \varphi \circ S_{(A'Q)}$.

3. Soit ψ l'antidéplacement qui envoie A' sur Q et P sur A'.

a. Montrer que $\psi(J) = I$.

b. Montrer que ψ est une symétrie glissante.

c. Déterminer les éléments caractéristiques de ψ.

4. Soit M un point du plan.

On pose $\psi(M) = M_1$ et $\varphi(M) = M_2$.

Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on déterminera.

25 On considère un carré ABCD de centre I tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$. Soit E le point du plan tel que DCE est un triangle équilatéral direct.

On désigne par J, K et L les milieux respectifs des segments $[DC]$, $[AD]$ et $[DE]$ et par O le centre du cercle circonscrit au triangle DCE.

1. On pose $\varphi = R_{\left(D, \frac{\pi}{3}\right)} \circ S_{(IJ)}$.

a. Déterminer $\varphi(C)$ et $\varphi(D)$.

b. Montrer alors que φ est une symétrie glissante dont on déterminera les éléments caractéristiques.

2. a. Caractériser l'application $t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_{(AB)}$.

b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'application $\psi = t_{\overrightarrow{BD}} \circ S_{(AB)}$.

3. Pour tout point N du plan on considère les points $N_1 = R_{\left(D, \frac{\pi}{3}\right)}(N)$ et $N_2 = R_{\left(O, -\frac{2\pi}{3}\right)}(N)$.

Montrer que le milieu du segment $[N_1N_2]$ est un point fixe que l'on précisera.

4. Soit M_0 un point du plan. On considère la suite des points (M_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(M_n) = M_{n+1}$.

a. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\overrightarrow{M_0M_{2n}} = (2n)\vec{L}$.

b. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, M_{2n} appartient à une droite fixe que l'on précisera.

26 On considère un rectangle ABCD tel que $AB = 2BC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$.

On désigne par I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.

1. a. Montrer qu'il existe un unique déplacement f du plan tel que $f(A) = C$ et $f(I) = J$.

b. Caractériser f puis en déduire que $f(B) = D$.

2. Déterminer la droite Δ telle que $f = S_{(IJ)} \circ S_{\Delta}$.

3. Soit r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a. Déterminer $r(B)$, $r(C)$ et $r(J)$.

b. Soit M un point de $[CJ]$, la perpendiculaire à (IM) issue de I coupe la perpendiculaire à (BM) issue de J en M'. Quel est l'ensemble des points M' lorsque M décrit $[CJ]$?

4. On pose $g = r \circ f$.

a. Montrer que g est une rotation dont on précisera l'angle.